

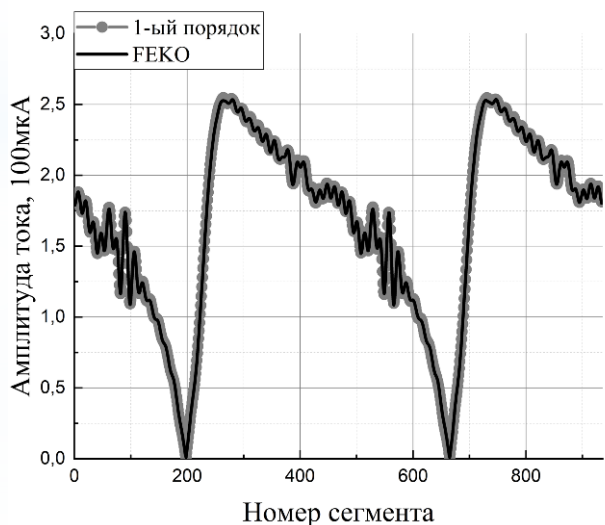
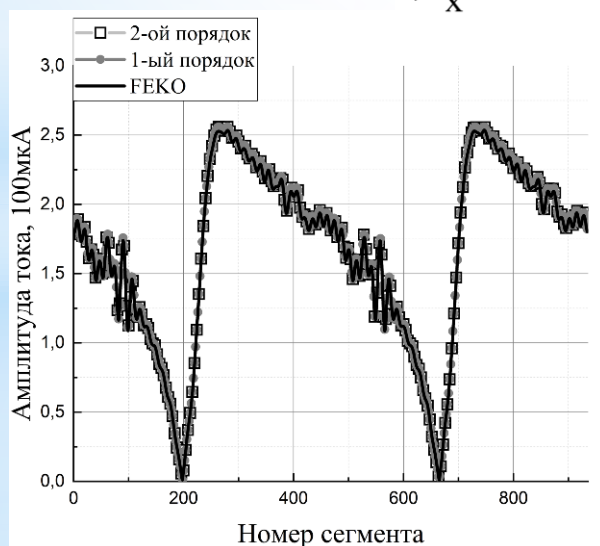
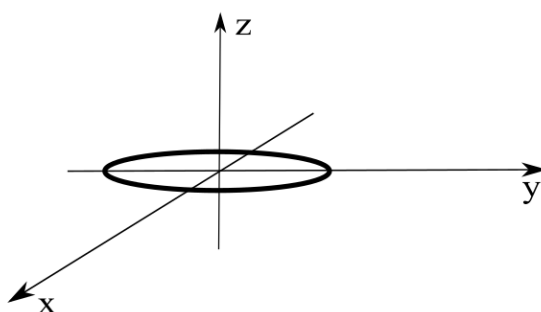
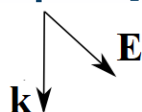


Издательство ИТПЭ РАН

ISSN 2949-0553

СОВРЕМЕННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

научный рецензируемый журнал



Применение метода моментов для численного решения задачи
дифракции волн на тонком идеально проводящем проводе

И.С. Хузин, Д.А. Коняев

2026

№ 4 (24)

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной электродинамики
Российской академии наук

Журнал основан в 2022 году

Том 5. Выпуск № 4 (24)

Современная электродинамика

научный рецензируемый журнал

Под редакцией академика РАН А.Н. Лагарькова

Москва, 2026

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук

ISSN 2949-0553

Современная электродинамика

Научный рецензируемый журнал. Издаётся с октября 2022 года.

Выходит один раз в два месяца.

Т. 5. № 4 (24)

2026

Главный редактор академик РАН А.Н.Лагарьков

Редакционная коллегия: к.т.н. Н.П. Балабуха, к.т.н. К.М. Басков, д.ф.-м.н. А.П. Виноградов, д.ф.-м.н. А.Б. Грановский, д.ф.-м.н. А.А. Дорофеев, д.ф.-м.н. В.Н. Кисель, к.ф.-м.н. К.И. Кугель, к.т.н. Н.Л. Меньших, чл.-корр. РАН А.М. Мерзликин, д.ф.-м.н. А.А. Пухов, д.ф.-м.н. А.Л. Рахманов, д.ф.-м.н. А.В. Рожков, д.ф.-м.н. К.Н. Розанов, к.т.н. И.А. Рыжиков, д.ф.-м.н. А.К. Сарычев, д.т.н. Ю.В. Юханов

Адрес редакции:

125412, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр. 6

тел., факс 8 (495) 484-26-33

эл.почта electrodynamics@mail.ru

Свидетельство о регистрации Эл № ФС77-83666 от 26.07.2022 г.

Дата выхода в свет: 28.08.2026. Тираж 30 экз.

© ИТПЭ РАН, 2026

Содержание номера

1	Теоретическая электродинамика	4
	Завитаев Э.В., Русаков О.В., Уткин А.И., Харитонов К.Е. Расчет самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из металла . . .	4
2	Вычислительная электродинамика	13
	Хузин И.С., Коняев Д.А. Применение метода моментов для численного решения задачи дифракции волн на тонком идеально проводящем проводе	13
3	Вопросы экспериментальной электродинамики	30
	Киселев А.В., Гусев А.В., Глушников А.В., Косицын С.А., Суров Д.И., Баженова О.П., Рыков Е.В., Штокал А.О. Erratum к статье «Особенности проектирования тонкоплёночных нагревателей оптических элементов космических аппаратов»	30

Расчет самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из металла

Э.В. Завитаев¹, О.В. Русаков², А.И. Уткин², К.Е. Харитонов^{* 2}

¹Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Мытищинский филиал, Мытищи, Московская область, Россия

²Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, Московская область, Россия

Статья поступила в редакцию 13.07.2026

Одобрена после рецензирования 14.08.2026

Принята к публикации 18.08.2026

Опубликована 28.08.2026

Аннотация

В статье выполнен аналитический расчет самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из немагнитного металла. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к радиусу проволоки может принимать произвольные значения. За теоретическую основу работы принят строгий кинетический подход, базирующийся на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. В качестве граничных условий использовались условия зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности проволоки (модель Фукса). В рамках постановки задачи высокочастотный ток возбуждается в проволоке однородным периодическим по времени электрическим полем без учета макроскопического скин-эффекта. Искомый коэффициент самоиндукции вычисляется через энергию магнитного поля и силу тока, протекающего через поперечное сечение проволоки. В результате проведенного расчета выявлено, что самоиндукция тонкой цилиндрической проволоки из металла существенно зависит от отношения ее радиуса к длине свободного пробега электронов, коэффициента зеркальности ее поверхности и частоты внешнего электрического поля. Также обоснована комплексная физическая природа самоиндукции в микроскопических масштабах. Полученные результаты наглядно демонстрируют важные кинетические и размерные особенности малых проводящих систем, которые не проявляются в макроскопических образцах, и могут найти применение при проектировании составных элементов современной микро- и нанoeлектроники.

Ключевые слова: тонкая проволока, магнитный поток, магнитная индукция, самоиндукция, плотность тока

EDN: [DKTXDM](#)

doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-04-12](#)

Calculation of self-induction a thin cylindrical metal wire

E.V. Zavitaev¹, O.V. Rusakov², A.I. Utkin², K.E. Kharitonov^{*2}

¹ *Mytishchi Branch of Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Mytishchi, Moscow Region, Russia*

² *State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuyevo, Moscow Region, Russia*

* kirillharitonov1@mail.ru

*Харитонов Кирилл Евгеньевич, kirillharitonov1@mail.ru

Abstract

The article presents an analytical calculation of the self-induction of a thin cylindrical wire made of a non-magnetic metal. The general case is considered, where the ratio of the mean free path of electrons to the radius of the wire can take arbitrary values. The work is based on a rigorous kinetic approach, which is based on solving the Boltzmann kinetic equation for conduction electrons in a metal. The boundary conditions used are the conditions of mirror-diffuse reflection of electrons from the inner surface of the wire (Fuchs model). Within the framework of the problem statement, a high-frequency current is excited in the wire by a uniform time-periodic electric field without taking into account the macroscopic skin effect. The sought-for self-inductance coefficient is calculated through the energy of the magnetic field and the current flowing through the cross-section of the wire. As a result of the calculation, it was found that the self-induction of a thin cylindrical metal wire significantly depends on the ratio of its radius to the mean free path of electrons, the coefficient of reflectivity of its surface, and the frequency of the external electric field. The complex physical nature of self-induction at microscopic scales was also substantiated. The obtained results clearly demonstrate important kinetic and dimensional features of small conducting systems that are not observed in macroscopic samples and can be used in the design of components for modern micro- and nanoelectronics.

Key words: thin wire, magnetic field energy, magnetic induction, self-induction, current density

Введение

В настоящее время не вызывает сомнений необходимость дальнейшего теоретического и экспериментального изучения электромагнитных свойств малых проводящих объектов [1–5]. Так, например, изучается высокочастотная электропроводность металлических нанослоев с учетом эффектов размерного квантования и анизотропии зонной структуры проводника [1]. Большой интерес представляют оптические, электрические и радиоэкранирующие свойства тонких пленок [2], а также влияние анизотропии изоэнергетической поверхности на электропроводность тонкой проводящей пленки в продольном магнитном поле [3]. С другой стороны, актуальной задачей, например, является исследование влияния кинетических и квантовых волновых свойств вырожденной электронной плазмы на взаимодействие S-волны с металлическим полупространством [4]. Важную роль для описания кинетических процессов в тонких пленках, проволоках, в мелких металлических частицах, при описании скин-эффекта в металле имеет анализ зеркально-диффузных граничных условий для электронов на поверхности металла с учетом зависимости от угла падения [5].

В частности, в ряде работ отмечается широкий интерес к электромагнитным и плазмонным свойствам систем, которые включают в себя проволоки из металла малого радиуса [6–10]. Описана экспериментальная генерация интенсивных однопериодных поверхностных плазмон-поляритонов на металлической проволоке, возбуждаемых электронами [6]. Получена в явном виде формула для расчета характеристик поверхностных плазмонов металлической проволоки в терагерцевом диапазоне [7]. Показана возможность распространения и фокусировки терагерцевых поверхностных плазмон-поляритонов в металлических проволоках [8]. Исследовано взаимодействие плазмонов в многопроволочных нановолноводах [9]. Экспериментально изучено резонансное рассеяние света на металлических нанопроволоках из золота и меди в инфракрасном диапазоне, позволяющее усилить электромагнитное поле [10].

Электромагнитные свойства данных проволок определяются такими параметрами как электропроводность и индуктивность. Эти характеристики для проволок, имеющих радиус, который существенно превышает длину свободного пробега электронов внутри объемного образца, могут быть определены с использованием макроскопической электродинамики [11]. Между тем электромагнитные свойства проволок, имеющих радиус, который сравним с длиной свободного пробега электронов Λ , значительно отличаются от свойств «массивных» образцов [12–14].

Расчеты электрической проводимости внутри тонких цилиндрических проволок из металла приведены в работах [12, 13]. Определение магнитной индукции внутри таких проволок обсуждалось в работах [14, 15]. В данных работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана, для электронов в металле. В настоящей работе применяется тот же самый подход для расчета самоиндукции.

Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая проволока из немагнитного металла (относительная магнитная проницаемость $\mu \approx 1$) радиуса R и длины D (будем считать, что $D \gg R$), к концам которой приложено переменное электрическое напряжение частоты ω . Принимается, что направление электрического поля

совпадает с осью цилиндра. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $R < \gamma$ — глубины скин-слоя).

Однородное периодическое по времени t электрическое поле, вектор напряженности которого $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, воздействует на электроны проводимости внутри проволоки и вызывает появление внутри нее высокочастотного тока с плотностью $\mathbf{j}$.

Проведем расчет самоиндукции, обусловленной магнитным полем, которое порождается этим током.

Расчет самоиндукции

Коэффициент самоиндукции L может быть вычислен через энергию магнитного поля W :

$$W = \frac{LI^2}{2} \implies L = \frac{2W}{I^2}, \quad (1)$$

где I — сила тока, через поперечное сечение проволоки.

Согласно определению энергия магнитного поля W :

$$W = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV,$$

где B — магнитная индукция; μ_0 — магнитная постоянная вакуума; $dV = 2\pi DR^2 \delta d\delta$; $\delta = \frac{r_{\perp,B}}{R}$ — «безразмерный радиус индукции»; $r_{\perp,B}$ — компонента радиус-вектора электрона в плоскости перпендикулярной оси симметрии проволоки при определении магнитной индукции.

Тогда

$$W = \int_0^1 \frac{(B(\delta))^2}{2\mu_0} dV = \frac{\pi DR^2}{\mu_0} \int_0^1 (B(\delta))^2 \delta d\delta. \quad (2)$$

Выражение для магнитной индукции B внутри проволоки, где в качестве граничного условия использовались условия зеркально-диффузного отражения электронов (модель Фукса), получено в работе [14]. Данное выражение можно записать в следующем виде:

$$B = \frac{3\mu_0 n e^2 R^2 E_z}{\pi v_F m \delta} \int_0^\delta \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\rho \sqrt{1-\rho^2}}{\nu} \left(\frac{(q-1) \exp\left(\frac{-\nu\eta}{\rho}\right)}{1 - q \exp\left(\frac{-\nu\eta_0}{\rho}\right)} + 1 \right) \xi d\xi d\rho d\alpha, \quad (3)$$

где

$$\xi = \frac{r_{\perp}}{R}, \quad \rho = \frac{v_{\perp}}{v_F}, \quad \nu = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) \frac{R}{v_F},$$

$$\eta = \xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}.$$

Здесь e , m , n — соответственно, заряд, масса и концентрация электронов; E_z — составляющая напряженности электрического поля вдоль оси симметрии проволоки; v_F — скорость Ферми; q — коэффициент зеркальности поверхности; $r_{\perp}$ и $v_{\perp}$ — соответственно, компоненты радиус-вектора и скорости электрона в плоскости перпендикулярной оси симметрии проволоки; τ — электронное время релаксации.

Подставив (3) в (2), получим формулу для вычисления энергии магнитного поля W :

$$W = \frac{\mu_0 n^2 e^4 R^6 E_z^2 D}{v_F^2 m^2} J_W, \quad (4)$$

где

$$J_W = \frac{9}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\delta} \left(\int_0^\delta \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\xi \rho \sqrt{1-\rho^2}}{\nu} \left(\frac{(q-1) \exp\left(\frac{-\nu\eta}{\rho}\right)}{1 - q \exp\left(\frac{-\nu\eta_0}{\rho}\right)} + 1 \right) d\xi d\rho d\alpha \right)^2 d\delta.$$

Выражение для силы тока I через поперечное сечение тонкой цилиндрической проволоки с граничными условиями Фукса было получено в работе [12]:

$$I = \frac{6ne^2 R^3 E_z}{v_F m} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\xi \rho \sqrt{1 - \rho^2}}{\nu} \left(\frac{(q - 1) \exp\left(\frac{-\nu \eta}{\rho}\right)}{1 - q \exp\left(\frac{-\nu \eta_0}{\rho}\right)} + 1 \right) d\xi d\rho d\alpha.$$

Тогда

$$I^2 = \frac{n^2 e^4 R^6 E_z^2}{v_F^2 m^2} J_I, \quad (5)$$

где

$$J_I = 36 \left(\int_0^1 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\xi \rho \sqrt{1 - \rho^2}}{\nu} \left(\frac{(q - 1) \exp\left(\frac{-\nu \eta}{\rho}\right)}{1 - q \exp\left(\frac{-\nu \eta_0}{\rho}\right)} + 1 \right) d\xi d\rho d\alpha \right)^2.$$

Подставив (4) и (5) в (1), найдем искомую самоиндукцию L внутри проволоки:

$$L = 2\mu_0 D \frac{J_W}{J_I}. \quad (6)$$

Заметим, что самоиндукция, обусловленная магнитным полем вне проволоки, не зависит от характера распределения тока по ее сечению и имеет логарифмическую расхожимость.

В случае, когда радиус проволоки R значительно превышает длину свободного пробега электронов Λ ($R \gg \Lambda$), из (6) можно получить макроскопическую асимптотику самоиндукции L_m , обусловленной магнитным потоком внутри проволоки. После проведения несложных вычислений, имеем:

$$L_m = \frac{\mu_0 D}{8\pi}. \quad (7)$$

Анализ результатов

Для проведения анализа результатов самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из металла введем новые обозначения:

$$\varepsilon = \left| \frac{L_m - |L|}{|L|} \right|, \quad x = \frac{R}{\Lambda}, \quad y = \frac{\omega R}{v_F},$$

где ε – относительная погрешность модуля самоиндукции L , x – безразмерная обратная длина свободного пробега электронов, y – безразмерная частота внешнего электрического поля.

Пусть имеется тонкая проволока из меди, для которой средняя длина свободного пробега электронов Λ при комнатной температуре составляет примерно 40 нм. Тогда значение безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x = 0,1$ определяет радиус проволоки $R = 4$ нм. Случай, когда $\Lambda \gg R$, соответствует так называемому свободно-электронному режиму. В этом случае движение носителей заряда характеризуется отсутствием столкновений с узлами кристаллической решётки, и самоиндукция проволоки обусловлена чисто кинетическими эффектами, связанными с рассеянием электронов на ее поверхности. Поскольку для $x = 0,1$ классический расчет глубины проникновения поля дает значения меньше длины свободного пробега, проволока находится в режиме аномального скин-эффекта, что необходимо учесть при проведении соответствующих оценок: при безразмерной частоте внешнего электрического поля $y = 0,1$ глубина скин-слоя $\gamma = 24$ нм; при $y = 3$ глубина скин-слоя $\gamma = 8$ нм. Значение безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x = 1$ ($R = \Lambda$) соответствует переходному режиму между классическим и аномальным скин-эффектами с радиусом проволоки $R = 40$ нм. В этом случае при безразмерной частоте внешнего электрического поля $y = 0,1$ глубина скин-слоя $\gamma = 51$ нм, а при $y = 3$ глубина скин-слоя $\gamma = 30$ нм. Следовательно,

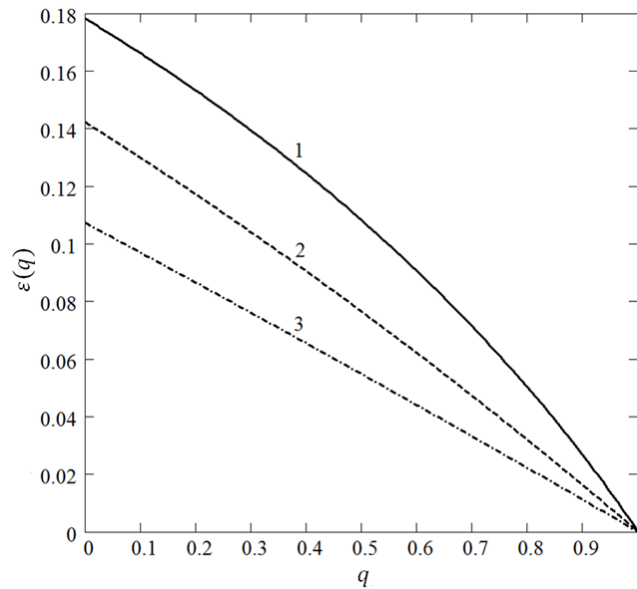


Рисунок 1 – Зависимость относительной погрешности ε модуля самоиндукции L от коэффициента зеркальности поверхности q при фиксированном значении безразмерной частоты внешнего электрического поля y и при различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x : 1 - ($y = 3, x = 0, 1$), 2 - ($y = 3, x = 1, 1$), 3 - ($y = 3, x = 3$)

предложенная теория самоиндукции является корректной в рассматриваемом интервале выбранных параметров и может быть использована для практического применения полученных результатов.

На рис. 1 представлены графики зависимости относительной погрешности $\varepsilon(q)$ модуля самоиндукции L от коэффициента зеркальности поверхности q для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной частоты внешнего электрического поля y . Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x варьируется для каждой кривой.

Характер рассеяния электронов на границе поверхности проволоки существенно влияет на его внутреннее магнитное поле. Из рис. 1 видно, что при малых значениях коэффициента зеркальности ($q \rightarrow 0$) относительная погрешность $\varepsilon(q)$ модуля самоиндукции L достигает своего максимума. По мере приближения к поверхности близкой к зеркальной ($q = 1$, классический результат) все кривые приближаются к одной точке. Это означает, что кинетические эффекты не влияют на относительную погрешность $\varepsilon(q)$ модуля самоиндукции L , объемное рассеяние электронов преобладает над их поверхностным рассеянием, система «возвращается» к классическому случаю.

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной погрешности $\varepsilon(x)$ модуля самоиндукции L от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении коэффициента зеркальности поверхности q . Безразмерная частота внешнего электрического поля y варьируется для каждой кривой.

Из анализа графиков на рисунке видно, что при различных значениях безразмерной частоты внешнего электрического поля y наибольшее отличие относительной погрешности $\varepsilon(x)$ модуля самоиндукции L достигается, когда длина свободного пробега электронов значительно превосходит радиус проволоки. По мере увеличения радиуса проволоки это значение нивелируется, поскольку имеет место макроскопическая асимптотика.

На рис. 3 представлены графики зависимости относительной погрешности $\varepsilon(x)$ модуля самоиндукции L от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной частоты внешнего электрического поля y . Коэффициент зеркальности поверхности q варьируется для каждой кривой.

Из хода кривых на рис. 3 видно, что коэффициент зеркальности поверхности q в значительной степени влияет на самоиндукцию. При малых значениях коэффициента зеркальности поверхности q относительная погрешность $\varepsilon(x)$ модуля самоиндукции L сначала возрастает, достигает своего максимума, а затем монотонно убывает. При некотором значении коэффициента зеркальности поверхности q (кривые 2 и 3) зависимость качественно изменяется, а именно, зависимость относительной погрешности $\varepsilon(x)$ модуля самоиндукции L становится убывающей. С увеличением значения безразмерной обратной

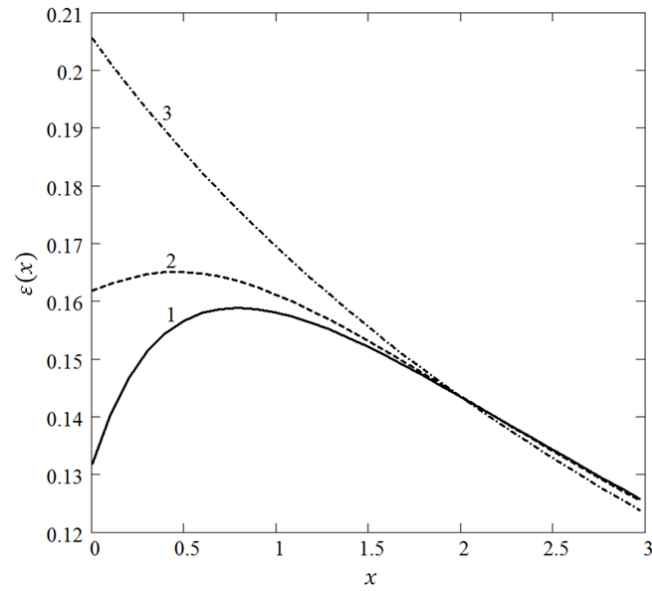


Рисунок 2 – Зависимость относительной погрешности ε модуля самоиндукции L от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x при фиксированном значении коэффициента зеркальности поверхности q и при различных значениях безразмерной частоты внешнего электрического поля y : 1 - ($q = 0,01$, $y = 0,1$), 2 - ($q = 0,01$, $y = 0,5$), 3 - ($q = 0,01$, $y = 1,1$)

длины свободного пробега электронов x коэффициент зеркальности поверхности q в меньшей степени влияет на относительную погрешность $\varepsilon(x)$. Кривые в дальнейшем будут практически сливаться, когда металлическая проволока становится макроскопической ($x \gg 1$), то есть когда объемное рассеяние электронов превалирует над их поверхностным рассеянием.

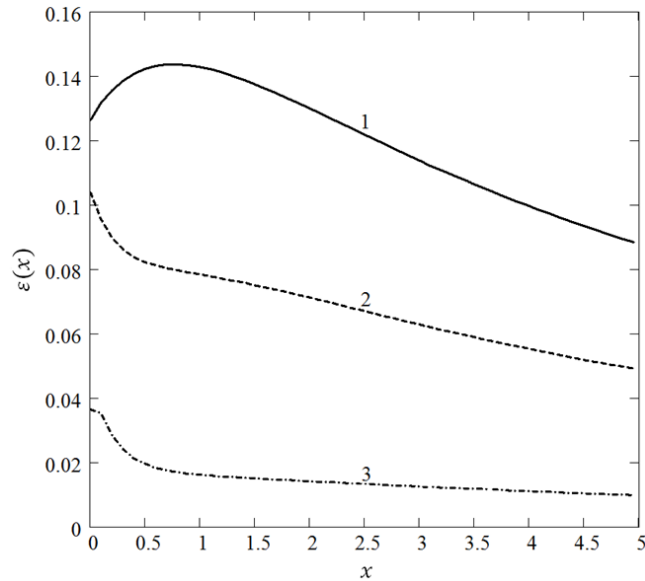


Рисунок 3 – Зависимость относительной погрешности ε модуля самоиндукции L от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x при фиксированном значении безразмерной частоты внешнего электрического поля y и при различных значениях коэффициента зеркальности поверхности q : 1 - ($y = 0,1$, $q = 0,1$), 2 - ($y = 0,1$, $q = 0,5$), 3 - ($y = 0,1$, $q = 0,9$)

Исходя из рис. 2 и рис. 3, можно установить, что классическая макроскопическая электродинамика вносит существенную погрешность в определение коэффициента самоиндукции, когда радиус проволоки сравним с длиной свободного пробега электронов (безразмерная обратная длина свободного пробега электронов $x \leq 1$). Это доказывает необходимость обязательного учета кинетических эффектов при расчете электромагнитных параметров малых проводящих объектов.

На рис. 4 представлены графики зависимости относительной погрешности $\varepsilon(y)$ модуля самоиндукции L от безразмерной частоты внешнего электрического поля y для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении коэффициента зеркальности поверхности q . Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x варьируется для каждой кривой.

На рис. 5 представлены графики зависимости относительной погрешности $\varepsilon(y)$ модуля самоиндукции L от безразмерной частоты внешнего электрического поля y для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x . Коэффициент зеркальности поверхности q варьируется для каждой кривой.

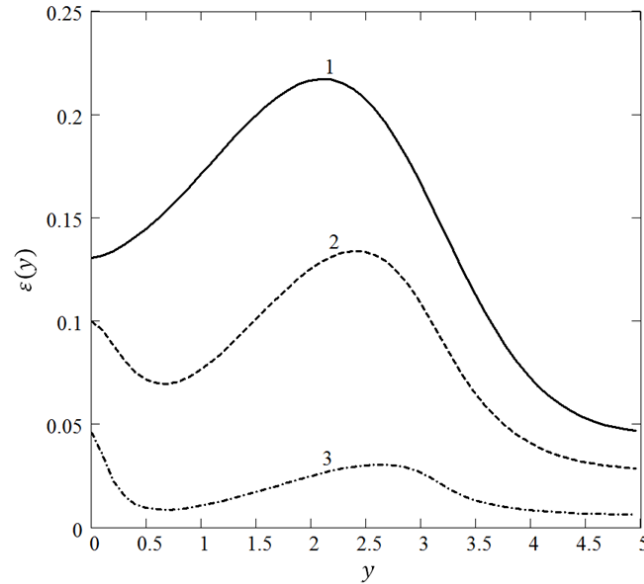


Рисунок 4 – Зависимость относительной погрешности ε модуля самоиндукции L от безразмерной частоты внешнего электрического поля y при фиксированном значении коэффициента зеркальности поверхности q и при различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x : 1 - ($q = 0, 5$, $x = 0, 1$), 2 - ($q = 0, 5$, $x = 0, 5$), 3 - ($q = 0, 5$, $x = 1, 1$)

Из рис. 4 и рис. 5 видно, что данные зависимости относительной погрешности $\varepsilon(y)$ модуля самоиндукции L от безразмерной частоты внешнего электрического поля y носят сложный осциллирующий характер. Это означает, что на относительную погрешность $\varepsilon(y)$ модуля самоиндукции L значительно влияют безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x и коэффициент зеркальности поверхности q . Следует отметить, что также имеют место осцилляции и модуля самоиндукции L проволоки при заданных параметрах. Данные осцилляции возникают, когда период изменения электрического поля становится соизмерим со временем движения электрона между диаметрально противоположными участками проволоки. Когда эти времена синхронизируются, возникает высокочастотный резонанс. Поле успевает изменить свое направление ровно в тот момент, когда группа электронов отражается от поверхности, что приводит к немонотонному изменению плотности тока и, как следствие, самоиндукции.

Таким образом, такой нетривиальный характер поведения кривых по мере увеличения безразмерной частоты внешнего электрического поля y связан с проявлением резонансных эффектов, наблюдаемых при отражении электронов от поверхности проволоки.

Заключение

Из приведенных выше расчетов следует, что коэффициент самоиндукции для тонких металлических проволок с учетом влияния кинетических эффектов зависит от отношения радиуса проволоки к длине свободного пробега электронов, коэффициента зеркальности ее поверхности и частоты электрического поля.

Кроме того, физическая природа коэффициента самоиндукции имеет комплексный характер. Ее мнимая часть описывает дополнительные диссипативные потери энергии магнитного поля, обоснованные поверхностным рассеянием электронов от поверхности, что принципиально отличает микро- и наноразмерные объекты от макроскопических.

Предложенные результаты аналитического расчета самоиндукции тонкой цилиндрической про-

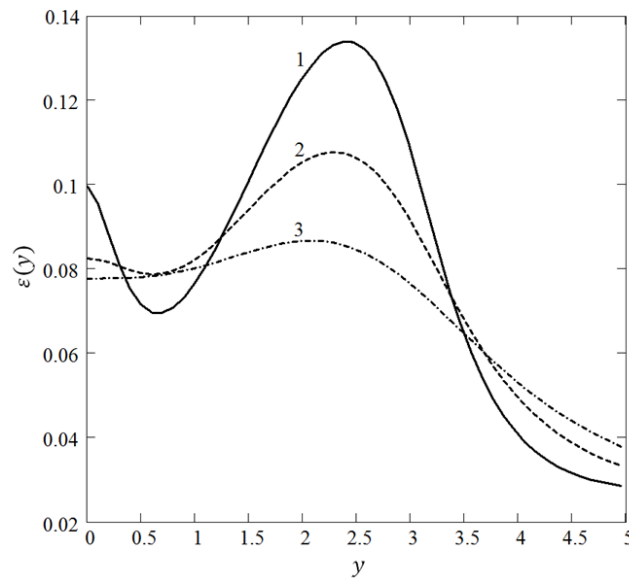


Рисунок 5 – Зависимость относительной погрешности ε модуля самоиндукции L от безразмерной частоты внешнего электрического поля y при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и при различных значениях коэффициента зеркальности поверхности q : 1 - ($x = 0, 1, q = 0, 1$), 2 - ($x = 0, 1, q = 0, 5$), 3 - ($x = 0, 1, q = 0, 9$)

локи из металла имеют прямое прикладное значение для проектирования и оптимизации элементной базы современной микро- и нанoeлектроники.

Например, при помощи предложенной математической модели можно с высокой точностью рассчитать так называемую «паразитную индуктивность», предотвращая задержки сигналов и обеспечивая целостность данных в современных полупроводниковых приборах и элементах интегральных схем, основой которых являются тонкие проводящие проводники.

Обнаруженный осциллирующий характер самоиндукции открывает возможности для более точной настройки резонансных частот в наноразмерных плазмонных волноводах и антеннах на базе металлических нитей, что критически важно при создании устройств связи и систем терагерцовой спектроскопии.

Учет точных значений самоиндукции для определенных металлических нанонитей позволяет с высокой достоверностью спрогнозировать диэлектрическую и магнитную проницаемость композитных пленок, которые используются для поглощения или перенаправления электромагнитного излучения.

Таким образом, проведенный расчет позволяет выявить целый ряд значимых особенностей коэффициента самоиндукции для тонких цилиндрических проволок из металла, которые не характерны для макроскопических проволок.

Список литературы

- [1] Савенко О.В., Кузнецова И.А. Высокочастотная электропроводность металлического нанослоя с учетом эффектов размерного квантования и анизотропии зонной структуры проводника // Журнал технической физики. 2026. Т. 96, № 3. С. 448–457. DOI: [10.61011/JTF.2026.03.62527.161-25](https://doi.org/10.61011/JTF.2026.03.62527.161-25)
- [2] Воронин А.С., Бриль И.И., Фадеев Ю.В. и др. Оптические, электрические и радиоэкранирующие свойства тонких пленок на основе серебряных нанопроволок // Журнал технической физики. 2025. Т. 95, № 1. С. 98–106. DOI: [10.61011/JTF.2025.01.59465.224-24](https://doi.org/10.61011/JTF.2025.01.59465.224-24)
- [3] Кузнецова И.А., Савенко О.В., Романов Д.Н. Влияние анизотропии изоэнергетической поверхности на электропроводность тонкой проводящей пленки в продольном магнитном поле // Журнал технической физики. 2024. Т. 94, № 5. С. 699–707. DOI: [10.61011/JTF.2024.05.57807.243-23](https://doi.org/10.61011/JTF.2024.05.57807.243-23)
- [4] Бедрикова Е.А., Зверев Н.В., Паренкина В.И., Юшканов А.А. Квантовая электронная плазма и взаимодействие S-волны с металлическим полупространством // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 54–65. DOI: [10.18384/2310-7251-2021-4-54-65](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2021-4-54-65)

- [5] Каримов Ф.А., Юшканов А.А. Зеркально-диффузные граничные условия для электронов на поверхности металла с учётом зависимости от угла падения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2020. № 1. С. 50–56. DOI: [10.18384/2310-7251-2020-1-50-56](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2020-1-50-56)
- [6] Op't Root W.P.E.M., Brussaard G.J.H., Smorenburg P.W., Luiten O.J. Single-cycle surface plasmon polaritons on bare metal wire excited by relativistic electrons // Nat. Commun. 2016. Vol. 7. P. 13769. DOI: [10.1038/ncomms13769](https://doi.org/10.1038/ncomms13769)
- [7] Yang J., Cao Q., Zhou C. Explicit formula for metal wire plasmon of terahertz wave // Opt. Express 2009. Vol. 17, No. 23. P. 20806–20815. DOI: [10.1364/OE.17.020806](https://doi.org/10.1364/OE.17.020806)
- [8] Maier S.A., Maier S.A., Andrews S.R., Martin-Moreno L., Garcia-Vidal F.J. Terahertz Surface Plasmon-Polariton Propagation and Focusing on Periodically Corrugated Metal Wires // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. No. 17. P. 176805 (1-4). DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.176805](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.176805)
- [9] Manjavacas A., Garcia de Abajo F.J. Coupling of gap plasmons in multi-wire waveguides // Opt. Express 2009. Vol. 17, No. 22. P. 19401–19413. DOI: [10.1364/OE.17.019401](https://doi.org/10.1364/OE.17.019401)
- [10] Neubrech F., Kolb T., Lovrincic R., Fahsold G., Pucci A., Aizpurua J., Cornelius T.W., Toimil-Molares M.E., Neumann R., Karim S. Resonances of individual metal nanowires in the infrared // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 89. No. 25. P. 253104 (1-3). DOI: [10.1063/1.2405873](https://doi.org/10.1063/1.2405873)
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 656 с.
- [12] Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла // Микроэлектроника. 2008. Т. 37, № 6. С. 429–438.
- [13] Кузнецова И.А., Чапкин А.В., Юшканов А.А. Влияние механизма поверхностного рассеяния электронов на высокочастотную проводимость тонкой металлической проволоки // Микроэлектроника 2011. Т. 40, № 1. Р. 45–51.
- [14] Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е. Расчет магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 2. С. 74–84. DOI: [10.18384/2310-7251-2016-2-74-84](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2016-2-74-84)
- [15] Завитаев Э.В., Русаков О.В., Уткин А.И., Харитонов К.Е. Зависимость магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла от механизма поверхностного рассеяния электронов // Микроэлектроника. 2022. Т. 51, № 2. С. 148–154. DOI: [10.31857/S0544126922020090](https://doi.org/10.31857/S0544126922020090)

Ссылка для цитирования:

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Уткин А.И., Харитонов К.Е. Расчет самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из металла // Современная электродинамика. 2026. Т. 5, № 4(24). С. 4-12. EDN [DKTXDM](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-04-12), doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-04-12](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-04-12)

Citation link:

Zavitaev E.V., Rusakov O.V., Utkin A.I., Kharitonov K.E. Calculation of self-induction a thin cylindrical metal wire // Modern Electrodynamics. 2026. Vol. 5, No. 4(24). P. 4-12. EDN [DKTXDM](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-04-12), doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-04-12](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-04-12)

Применение метода моментов для численного решения задачи дифракции волн на тонком идеально проводящем проводе

И.С. Хузин *¹, Д.А. Коняев^{1,2}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 31.07.2026

Одобрена после рецензирования 10.08.2026

Принята к публикации 18.08.2026

Опубликована 28.08.2026

Аннотация

В работе исследуется применение метода моментов при решении задачи дифракции электромагнитных волн на тонком идеально проводящем проводе произвольной формы изгиба и конечной длины, значительно превышающей диаметр его поперечного сечения. Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение электрического поля (EFIE) в приближении тонкого провода, которое решается относительно тока с помощью проекционного метода. В качестве базисных и тестовых функций используются конечные элементы нулевого, первого и второго порядков (кусочно-постоянные, линейные и квадратичные). Разработана программа, реализующая решение задачи дифракции на таких проводах методом моментов. Отдельное внимание уделено проблеме численного расчета интегралов, возникающих при составлении матрицы системы, а также дополнительной обработке случая совпадения сегментов источника и приёмника. Проведены расчёты для проводов различных конфигураций, которые сравниваются с результатами, полученными с помощью программного комплекса FEKO. Продемонстрирована необходимость использования обработки случая совпадающих сегментов источника и приёмника для малых радиусов проводов. Посредством численного эксперимента показаны недостатки использования функций низких порядков: конечные элементы нулевого порядка часто не позволяют добиться приемлемой точности нахождения тока, индуцированного на проводе, что заметно на небольших моделях при использовании сеток с малым количеством сегментов. Также показано, что использование конечных элементов первого порядка с точки зрения точности получаемых результатов и скорости расчётов предпочтительно.

Ключевые слова: метод моментов, дифракция электромагнитных волн, тонкий идеально проводящий провод, интегро-дифференциальное уравнение электрического поля (EFIE), метод конечных элементов

EDN: KIHNMQ

doi:10.24412/2949-0553-2026-424-13-29

The method of moments application for the numerical solution of the diffraction problem in a thin perfectly conducting wire

I.S. Khuzin *¹, D.A. Konyayev^{1,2}

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

² Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics RAS, Moscow, Russia

* khuzin.is20@physics.msu.ru

*Хузин Ильдар Семенович, khuzin.is20@physics.msu.ru

Abstract

This paper examines the application of the method of moments to solve the problem of electromagnetic wave diffraction by an arbitrarily bent thin perfectly conducting wire of finite length significantly exceeding its cross-sectional diameter. An Electric Field Integral Equation (EFIE) is considered in the thin-wire approximation, which is solved for current using the projection method. Finite elements of zero, first, and second orders (piecewise constant, linear, and quadratic) are used as basis and test functions. A numerical code implementing the Method of Moments solution for diffraction by such wires has been developed. Particular attention is given to the numerical calculation of the integrals arising during the assembly of the system matrix and the treatment of the case when source and receiver segments coincide. Calculations for wires of various configurations are compared with the results obtained using the FEKO software package. The necessity of using the processing of the case of coincidence of the source and receiver segments for small wire radii is demonstrated. Numerical experiments highlight the shortcomings of low-order basis functions: finite zero-order elements often do not allow achieving acceptable accuracy in computing the current induced on the wire, which is noticeable in small models when using meshes with a small number of segments. It is also shown that the use of first-order finite elements is preferable in terms of both the accuracy of the results and the computational efficiency.

Key words: method of moments, electromagnetic wave diffraction, thin perfectly conducting wire, Electric Field Integral Equation (EFIE), finite element method

Введение

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем электродинамики является решение задачи дифракции электромагнитных волн на телах сложной формы. В связи с широким использованием тонких проводов в составе различных объектов, особый интерес представляет задача дифракции на данных проводах, имеющих произвольную форму изгиба, а также конечную длину, много большую диаметра его сечения. Из-за отсутствия аналитического решения для рассматриваемого тела, в данной работе используется один из наиболее эффективных численных методов для построения приближённого решения задач дифракции – метод моментов [1, 2].

Для тонких проводников классическими подходами являются уравнения Халлена [3] и Поклингтона [4], которые сводят задачу к одномерному скалярному уравнению. При численной реализации этих уравнений для изогнутых проводов с использованием кусочно-постоянных базисных функций [5] в стандартной постановке дифференциальный оператор остаётся под знаком интеграла, что порождает сингулярность $1/R^3$ и приводит к значительно более медленной сходимости по сравнению с подходом на основе метода конечных элементов, применяемого к векторному интегро-дифференциальному уравнению электрического поля (EFIE), где возникает сингулярность $1/R$. Кроме того, импульсные базисные функции нулевого порядка [6] демонстрируют низкую точность при расчёте распределения тока вдоль проводника, особенно при малом числе неизвестных. Из-за этого в настоящей работе используется EFIE в слабой постановке с учётом приближения тонкого провода, которое позволяет единообразно моделировать провода кругового сечения произвольной геометрии и применять базисные функции более высокого порядка.

На сегодняшний день программный комплекс FEKO де-факто является стандартным средством при численном решении электродинамических задач [7]. Поэтому полученные результаты сравниваются с решениями, полученными при помощи программного комплекса FEKO. Следует отметить, что из-за отсутствия доступа к исходному коду, FEKO является «чёрным ящиком», что делает практически невозможным его оптимизацию и модификацию под конкретную задачу.

Разработана программа, позволяющая при помощи метода моментов численно решать задачу дифракции на данном теле с использованием конечных элементов нулевого, первого и второго порядков. Показано, что использование элементов нулевого порядка часто не позволяет добиться приемлемой точности нахождения тока, индуцированного на проводе. Показана целесообразность использования частично аналитического расчета возникающих интегралов с целью ускорения численного метода их вычисления. По результатам численных экспериментов получено, что предпочтительным с точки зрения точности получаемых результатов и скорости расчётов является использование конечных элементов первого порядка.

Постановка задачи

Рассматривается идеально проводящий провод T , представляющий собой тонкую проволоку постоянного кругового сечения произвольной формы изгиба. Обозначим комплексную амплитуду

падающего электромагнитного поля как $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\}$, а рассеянного как $\{\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s\}$. Временная зависимость задается как $e^{i\omega t}$. Тогда стационарная задача дифракции примет вид [8, 9]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i) = i\omega\varepsilon(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i), & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{T}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i) = -i\omega\mu(\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i), & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{T}, \\ [(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i), \mathbf{n}] = 0, & \mathbf{r} \in S, \\ [\mathbf{e}_r, \mathbf{E}^s] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r, [\mathbf{e}_r, \mathbf{H}^s]] + o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт сферической системы координат, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности провода — границе S , ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней по отношению к проводу среды.

Поставленная задача не решается аналитически. Для построения приближённого решения используется метод моментов, для применения которого предварительно сведём данную задачу (1) к интегро-дифференциальному уравнению электрического поля относительно поверхностных токов [10]. Рассеянное данным телом поле можно представить через векторный $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и скалярный $\Phi(\mathbf{r})$ потенциалы [11]:

$$\mathbf{E}^s = -i\omega\mathbf{A} - (\nabla\Phi). \quad (2)$$

Скалярный и векторный потенциалы можно записать следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma', \quad (3)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma', \quad (4)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ — поверхностная плотность токов, $\rho(\mathbf{r}')$ — поверхностная плотность заряда, $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки на поверхности провода. Используя граничные условия, можно получить интегро-дифференциальное уравнение:

$$\mathbf{E}_\tau^i = i\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) + (\nabla\Phi(\mathbf{r}))_\tau, \quad (5)$$

где индекс τ обозначает тангенциальную составляющую вектора относительно рассматриваемой поверхности.

В данной работе рассматривается приближение тонкого провода, при котором, пренебрегая угловой зависимостью распределения поверхностной плотности тока, рассчитывается ток вдоль оси провода. Для этого провод разбивается на осевые сегменты, что схематично показано на рис. 1. Тем самым удаётся избежать введения сетки на поверхности при численном решении поставленной задачи, что позволяет сократить требуемые вычислительные мощности. Данное приближение справедливо при радиусе провода a много меньшем длины провода L и длины волны λ , что можно записать в виде: $a \ll L, a \ll \lambda$.

Стоит отметить, что потенциалы содержат особенность в знаменателе, когда радиус-вектор наблюдателя $\mathbf{r}$ совпадает с радиус-вектором источника $\mathbf{r}'$, которая является интегрируемой в соответствии с теорией потенциала [12] для интеграла размерности $N \geq 2$. Однако, пренебрегая зависимостью поверхностной плотности тока от угла полярной системы координат в сечении провода, мы получаем одномерный интеграл по кривой, для которого данная особенность является неинтегрируемой:

$$\int_S \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_C \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} a d\varphi dl = 2\pi a \int_C \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl, \quad (6)$$

где dl — элемент длины кривой C , совпадающей с осью провода. Для обхода данной особенности используется следующее приближение [1]:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(\rho-\rho')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi-\phi') + (z-z')^2}, \quad (7)$$

где (ρ, ϕ, z) и (ρ', ϕ', z') — цилиндрические координаты точек наблюдения и источника соответственно в собственной системе координат источника. При выполнении условий $a \ll L$ и $a \ll \lambda$, можно считать, что вычисление поля происходит на оси провода, а источник находится на его поверхности, что в случае совпадения сегментов можно записать как $\rho = 0, \rho' = a$. Тогда выражение (7) можно переписать в виде:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}. \quad (8)$$

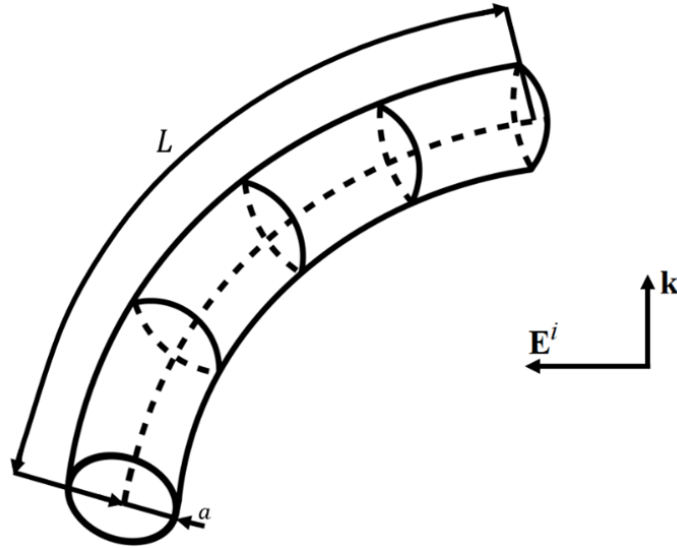


Рисунок 1 – Пример рассматриваемого объекта

В глобальной системе координат это выражение примет вид:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r}_{\text{axis}} - \mathbf{r}'_{\text{axis}})^2 + a^2}, \quad (9)$$

где $\mathbf{r}_{\text{axis}}$ и $\mathbf{r}'_{\text{axis}}$ — радиус- векторы точек на оси сегмента наблюдателя и источника соответственно, которые в дальнейшем будут заданы параметрически.

Стоит отметить, что данное приближение применяется для всех пар сегментов, как совпадающих, так и для различных, поскольку фактически исследуемый провод заменен линией, являющейся его осью, а введенный малый радиус a в (9) позволяет устранить неинтегрируемую особенность. Благодаря этому расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ между источником и наблюдателем никогда не может быть меньше радиуса провода a .

Введем для единообразия с исходной постановкой одномерный оператор дивергенции:

$$(\nabla_\tau, \mathbf{a}) = \text{div}_\tau \mathbf{a} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{a_l(l + \Delta l) - a_l(l)}{\Delta l} = \frac{\partial a_l}{\partial l}. \quad (10)$$

Тогда запишем уравнение непрерывности в виде:

$$(\nabla_\tau, \mathbf{J}) + i\omega\rho = 0. \quad (11)$$

Отсюда, выражая поверхностную плотность зарядов и подставляя ее в выражения для скалярного потенциала, получим:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2\pi a \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \int_C (\nabla'_\tau, \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl'. \quad (12)$$

Выразим искомую комплексную амплитуду тока через соотношение

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}') = 2\pi a \mathbf{J}(\mathbf{r}'). \quad (13)$$

Граничные условия $[(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i), \mathbf{n}] = 0$ можно записать в виде [13]:

$$(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i) \mathbf{e}_l = 0, \quad (14)$$

$$\frac{i}{4\pi} \left(\omega\mu \int_C \mathbf{I}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' + \frac{1}{\omega\varepsilon} \left(\nabla_\tau \int_C (\nabla'_\tau, \mathbf{I}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' \right) \right) = \mathbf{E}_\tau^i, \quad (15)$$

где $\mathbf{e}_l$ — единичный вектор вдоль оси проводника.

Таблица 1: Параметрические уравнения линий

Прямолинейный сегмент	Криволинейный сегмент
$\mathbf{r}(\xi) = \xi \mathbf{r}_n + (1 - \xi) \mathbf{r}_{n-1}$	$\mathbf{r}(\xi) = f_n^-(\xi) \mathbf{r}_{n-1} + g_n(\xi) \mathbf{r}_{n-1/2} + f_n^+(\xi) \mathbf{r}_n$
	$f_n^-(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2, \quad f_n^+(\xi) = -\xi + 2\xi^2,$
	$g_n(\xi) = 4(\xi - \xi^2).$

Метод моментов

Введем скалярное произведение:

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}), \mathbf{g}(\mathbf{r}) \rangle = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) d\sigma = 2\pi a \int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dl. \quad (16)$$

Умножим скалярно уравнение (5) на пробную функцию $\psi(\mathbf{r})$:

$$\langle (i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) + (\nabla \Phi(\mathbf{r}))_\tau), \psi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{E}_\tau^i, \psi(\mathbf{r}) \rangle. \quad (17)$$

Тогда с учетом (15)–(17) получим:

$$\begin{aligned} \frac{i}{4\pi} \left(\omega \mu \int_C \int_C \psi(\mathbf{r}) \mathbf{I}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' dl + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega \varepsilon} \int_C \psi(\mathbf{r}) \left(\nabla_\tau \int_C (\nabla'_\tau, \mathbf{I}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' \right) dl \right) = \int_C \mathbf{E}_\tau^i(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) dl. \end{aligned} \quad (18)$$

Приблизим провод конечным числом сегментов, как показано на рис. 2. Для элементов нулевого и первого порядка приблизим прямым отрезком провода цилиндрической формы, что схематично изображено на рис. 3. Заметим, что, аппроксимируя исходный провод набором отрезков, при использовании функций выше первого порядка стоит ожидать снижения точности решения до первого порядка соответственно, из-за чего для функций второго порядка возникает необходимость рассматривать криволинейные сегменты. В этом случае приблизим каждый сегмент кривой второго порядка, что схематично изображено на рис. 4.

Зададим уравнения линий, изображённых на рис. 3 и 4, используя параметр $\xi \in [0, 1]$. Соответствующие формулы представлены в таблице 1.

Введем обозначение:

$$\frac{d\mathbf{r}(\xi)}{d\xi} = \mathbf{r}'_\xi(\xi). \quad (19)$$

Элемент длины каждого сегмента также зададим параметрически:

$$dl = \left| \frac{d\mathbf{r}(\xi)}{d\xi} \right| d\xi = |\mathbf{r}'_\xi(\xi)| d\xi. \quad (20)$$

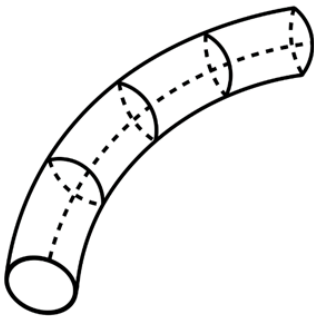


Рисунок 2 – Пример разбиения рассматриваемого объекта

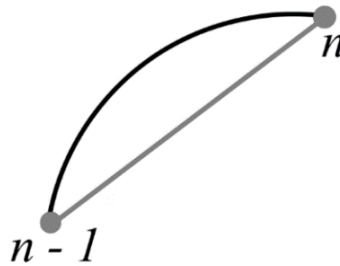


Рисунок 3 – Приближение криволинейного сегмента отрезком

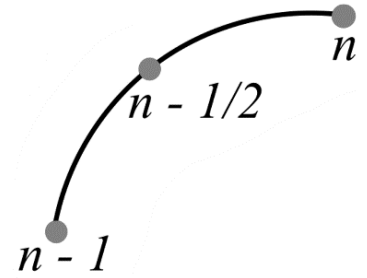


Рисунок 4 – Приближение криволинейного сегмента кривой второго порядка

Базисные функции нулевого порядка

Для начала в качестве базисных функций рассмотрим элементы нулевого порядка — кусочно-постоянные функции (pulse functions), которые соответствуют постоянной поверхностной плотности токов на каждом сегменте [5, 6]: $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N\}$, где N — число сегментов, на которые разбивается исходный тонкий провод.

Данные функции равны 1 на сегменте с совпадающим номером и 0 всюду вне его, что изображено на рис. 5 и 6 для сегмента T_m :

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{r}(\xi_m)) = \begin{cases} \mathbf{e}_m, & \mathbf{r} \in T_m, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} \notin T_m, \end{cases} \quad (\nabla_\tau, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}(\xi_m))) = \frac{1}{|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m)|} \frac{\partial f_m(\mathbf{r}(\xi_m))}{\partial \xi_m} \equiv 0 \quad (21)$$

где $\xi_m \in [0, 1]$, $\mathbf{e}_m = (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}) / |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}|$ — единичный вектор вдоль сегмента T_m .

В соответствии с методом моментов будем искать приближенное решение задачи (15) в виде:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}') = \sum_{m=1}^N I_m \mathbf{f}_m(\mathbf{r}(\xi_m)). \quad (22)$$

Заметим, что $(\nabla'_\tau, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) \equiv 0$ в точках, отличных от узлов сетки, а в узлах сетки это выражение не определено, таким образом, второе слагаемое в левой части (15), отвечающее за вклад скалярного потенциала, равно нулю.

Тогда при подстановке явных выражений в (18) получим:

$$\sum_{m=1}^N I_m \frac{i\omega\mu}{4\pi} (\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_m) \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{R} |\mathbf{r}'_\xi(\xi_m)| d\xi_m |\mathbf{r}'_\xi(\xi_t)| d\xi_t = \int_0^1 \mathbf{E}_\tau^i \mathbf{e}_t |\mathbf{r}'_\xi(\xi_t)| d\xi_t, \quad (23)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r}(\xi_m) - \mathbf{r}(\xi_t))^2 + a^2}$.

Касательные вектора при приближении провода отрезками постоянны вдоль каждого сегмента, однако также удобно выразить их параметрически:

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m(\xi) = \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1})}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}|} = \frac{\mathbf{r}'_\xi(\xi)}{|\mathbf{r}'_\xi(\xi)|} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_m}{|\mathbf{r}'_\xi(\xi)|}, \quad (24)$$

где $\tilde{\mathbf{e}}_m = (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1})$ — ненормированный вектор вдоль сегмента T_m .

С учетом новых обозначений уравнение (23) примет вид:

$$\sum_{m=1}^N I_m \frac{i\omega\mu}{4\pi} (\tilde{\mathbf{e}}_t, \tilde{\mathbf{e}}_m) \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m d\xi_t = \tilde{\mathbf{e}}_t \int_0^1 \mathbf{E}_\tau^i(\mathbf{r}(\xi_t)) d\xi_t. \quad (25)$$

В результате получаем, что задача (15) сводится к системе линейных уравнений (25), где $t = \overline{1, N}$.

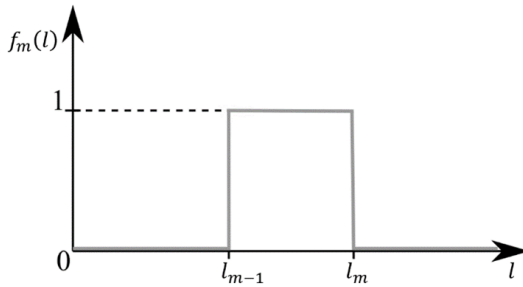


Рисунок 5 — График кусочно-постоянной функции

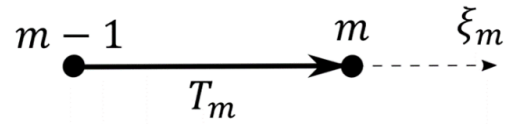


Рисунок 6 — Сегмент T_m

Базисные функции первого порядка

Кроме того, в качестве базисных функций рассмотрим элементы первого порядка — кусочно-линейные функции (rooftop functions) [5, 14]: $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$, где N — число аппроксимирующих сегментов, на которые разбивается исходный тонкий провод. Выберем узел с номером m , он является общим узлом для двух сегментов, изображенных на рис. 8, которые обозначим через T_m^- и T_m^+ . Тогда $C_m = T_m^- \cup T_m^+$ — носитель функции $\mathbf{f}_m$, график которой изображен на рис. 7.

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{r}(\xi_m^\pm)) = \begin{cases} \xi_m^+ \mathbf{e}_m^+, & \mathbf{r} \in T_m^+, \\ (1 - \xi_m^-) \mathbf{e}_m^-, & \mathbf{r} \in T_m^-, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} \notin T_m^+ \cup T_m^-, \end{cases} \quad (26)$$

$$|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m^\pm)| (\nabla_\tau, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}(\xi_m^\pm))) = \frac{\partial f_m(\mathbf{r}(\xi_m^\pm))}{\partial \xi_m^\pm} = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in T_m^+, \\ -1, & \mathbf{r} \in T_m^-, \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_m^+ \cup T_m^-, \end{cases} \quad (27)$$

где $\mathbf{e}_m^+ = \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}|}$ — единичный вектор вдоль сегмента T_m^+ , $\mathbf{e}_m^- = \frac{\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m|}$ — единичный вектор вдоль сегмента T_m^- , $\xi_m^\pm \in [0, 1]$.

Приближенное решение задачи (15) ищем в виде:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^N I_m \mathbf{f}_m(\mathbf{r}(\xi_m)). \quad (28)$$

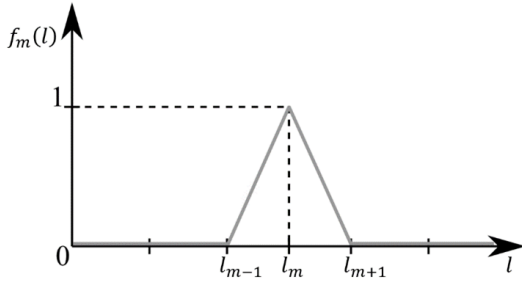


Рисунок 7 — График кусочно-линейной функции

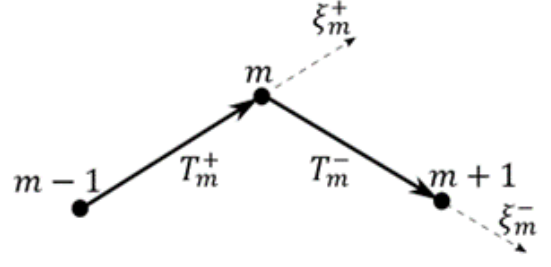


Рисунок 8 — Сегменты узла с номером m

Базисные функции второго порядка

Теперь в качестве базисных функций рассмотрим элементы второго порядка — кусочно-квадратичные функции, так называемые лагранжевы элементы [14], графики которых изображены на рис. 9 и рис. 10: $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{2N}\}$, где N — количество сегментов, которыми приближается исходный тонкий провод. Использование середины сегмента приводит к увеличению количества узлов сетки: $z_m = mh/2$, $m = \overline{0, 2N}$. Выберем узел с четным номером m , он является общим узлом для двух сегментов, которые обозначим через T_m^- и T_m^+ , что показано на рис. 11. Введем на данных сегментах функцию φ_m , график которой изображен на рис. 9.

$$\varphi_m(\mathbf{r}(\xi_m^\pm)) = \begin{cases} (-\xi_m^+ + 2\xi_m^{+2}) \mathbf{e}_m^+(\xi_m^+), & \mathbf{r} \in T_m^+, \\ (1 - 3\xi_m^- + 2\xi_m^{-2}) \mathbf{e}_m^-(\xi_m^-), & \mathbf{r} \in T_m^-, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} \notin T_m^+ \cup T_m^-, \end{cases} \quad (29)$$

$$|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m^\pm)| (\nabla_\tau, \varphi_m(\mathbf{r}(\xi_m^\pm))) = \frac{\partial \varphi_m(\mathbf{r}(\xi_m^\pm))}{\partial \xi_m^\pm} = \begin{cases} -1 + 4\xi_m^+, & \mathbf{r} \in T_m^+, \\ -3 + 4\xi_m^-, & \mathbf{r} \in T_m^-, \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_m^+ \cup T_m^-, \end{cases} \quad (30)$$

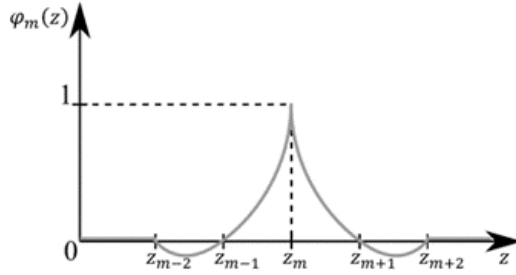
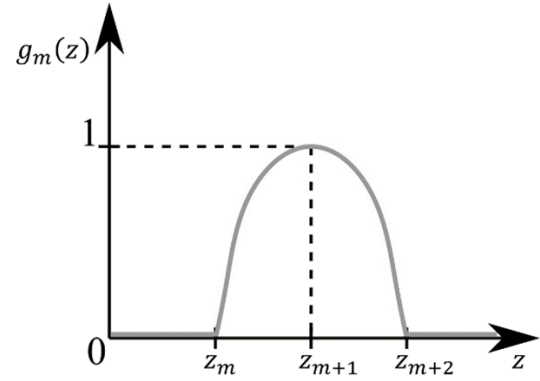
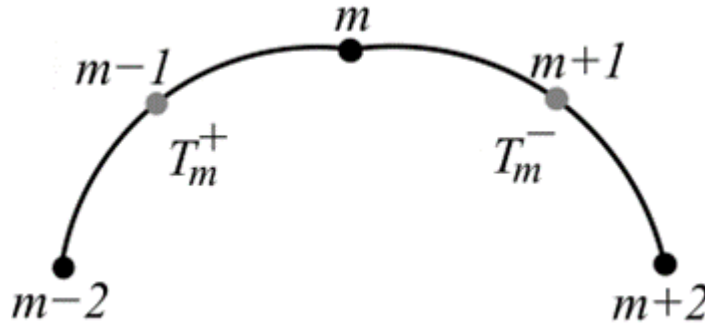


Рис. 9: Базисная функция при четном узле сетки

 z_m

 Рис. 10: Базисная функция при нечетном узле сетки z_{m+1}

 Рис. 11: Сегменты узла с номером m

где $\mathbf{e}_m^+(\xi_m^+) = \mathbf{r}'_\xi(\xi_m^+)/|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m^+)| = \tilde{\mathbf{e}}_m^+(\xi_m^+)/|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m^+)|$ — единичный касательный вектор сегмента T_m^+ , $\mathbf{e}_m^-(\xi_m^-) = \mathbf{r}'_\xi(\xi_m^-)/|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m^-)| = \tilde{\mathbf{e}}_m^-(\xi_m^-)/|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m^-)|$ — единичный касательный вектор сегмента T_m^- , $\xi_m^\pm \in [0, 1]$ — параметр, изменяющийся вдоль сегмента.

Рассматриваются так же функции, определенные на каждом сегменте T_m отдельно, которые принимают максимальное значение в середине сегмента, возрастая от 0 до 1 к его центру и затем убывая обратно до 0 к соседнему узлу, что показано на рис. 10

$$\mathbf{g}_m(\mathbf{r}(\xi_m)) = \begin{cases} 4(\xi_m - \xi_m^2) \mathbf{e}_m(\xi_m), & \mathbf{r} \in T_m, \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_m, \end{cases} \quad (31)$$

$$|\mathbf{r}'_\xi(\xi)|(\nabla_\tau, \mathbf{g}_m(\mathbf{r}(\xi_m))) = \frac{\partial g_m(\mathbf{r}(\xi_m))}{\partial \xi_m} = \begin{cases} 4(1 - 2\xi_m), & \mathbf{r} \in T_m, \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_m, \end{cases} \quad (32)$$

где $\mathbf{e}_m(\xi_m) = \mathbf{r}'_\xi(\xi_m)/|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m)| = \tilde{\mathbf{e}}_m(\xi_m)/|\mathbf{r}'_\xi(\xi_m)|$ — единичный касательный вектор сегмента T_m .

Таким образом, каждая функция с четным и нечетным индексами представима как:

$$\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}), & m = 2n, \quad n = \overline{0, N}, \\ \mathbf{g}_m(\mathbf{r}), & m = 2n - 1, \quad n = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (33)$$

Увеличению порядка точности решения способствует увеличение количества базисных функций в 2 раза [14].

Как и прежде, в соответствии с методом моментов будем искать приближенное решение задачи (15)

в виде:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{2N} I_m \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^N (I_{2m} \boldsymbol{\varphi}_m) + \sum_{m=1}^N (I_{2m-1} \mathbf{g}_{2m-1}), \quad (34)$$

где I_m – значение амплитуды тока в m -ом узле, $m = \overline{0, 2N}$.

Подстановка явного вида решения в (18) и интегрирование по частям вклада скалярного потенциала для функций первого и второго порядков (более подробный вывод приведен в Приложении) позволяют записать уравнение (18) в единообразной форме:

$$\sum_{m=0}^M I_m \frac{i}{4\pi} \left(\omega\mu \int_{C_t} \int_{C_m} \gamma_m(\mathbf{r}') \gamma_t(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega\varepsilon} \int_{C_t} \int_{C_m} (\nabla'_\tau, \gamma_m(\mathbf{r}')) (\nabla_\tau, \gamma_t(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t \right) = \int_{C_t} \mathbf{E}_\tau^i \gamma_t(\mathbf{r}) dl_t, \quad (35)$$

где $M = N$, $\gamma_t = \mathbf{f}_t$ при $t = \overline{0, N}$ и $M = 2N$, $\gamma_t = \boldsymbol{\psi}_t$ при $t = \overline{0, 2N}$ для первого и второго порядков соответственно. В итоге, задача (18) сводится к системе линейных уравнений (35).

Стоит отметить, что пробные функции первого и второго порядков обладают еще одним существенным преимуществом относительно функций нулевого порядка — они способны автоматически учитывать граничные условия: в узлах, где нет токов, соответствующие коэффициенты перед пробными функциями просто равны 0.

Обработка совпадающих сегментов

Стоит отметить, что при решении (35), возникают интегралы вида

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) \frac{\exp(-ikR)}{R} d\xi_1 d\xi_2, \quad (36)$$

где введено обозначение: $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r}(\xi_1) - \mathbf{r}(\xi_2))^2 + a^2}$.

Заметим, что несмотря на то, что интегралы являются собственными, благодаря слагаемому a^2 , при численном расчете данного интеграла (36), когда сегменты, по которым ведется интегрирование, совпадают, возникает случай $R = \sqrt{a^2} = a$. Так как a мало, то интегралы вида (36) берутся от быстро меняющейся функции, что может привести к существенным ошибкам при применении стандартных формул численного интегрирования на введённой сетке.

Необходимо подчеркнуть несколько моментов.

1. Для приближенного вычисления всех интегралов по умолчанию будут использоваться пятиточечные квадратурные формулы Гаусса [15–17].
2. При недостаточной точности расчета интегралов (36), качественный вид решения сохраняется, однако вычисленная амплитуда тока меньше и сходится к требуемому значению только при достаточном сгущении сетки интегрирования.
3. Расчет двойных интегралов вида (36) проводится на сгущающихся сетках до удовлетворения следующему критерию:

$$\left| \frac{U_N - U_{N-1}}{\frac{U_N + U_{N-1}}{2}} \right| \leq \delta = 10^{-8}, \quad (37)$$

где N – количество интервалов сетки для расчета интеграла, U_N – вычисленное значение интеграла при данном разбиении отрезка интегрирования. В рамках данной работы было установлено при помощи численного эксперимента, что данное значение δ достаточно для получения решения, согласующегося с аналогичными решениями, получаемыми программным комплексом ФЕКО. Дальнейшее уменьшение δ нецелесообразно из-за увеличения числа интервалов сетки N и роста вычислительных затрат без значимого улучшения итогового результата.

4. При достаточно малых значениях радиуса a ошибка расчета интеграла в случае совпадения сегментов убывает очень медленно при сгущении сетки.
5. Для увеличения скорости сходимости в случае совпадающих сегментов интеграл разбивается на две части, где внутренний интеграл от быстро меняющейся части вычисляется аналитически, когда это возможно. Остальные интегралы считаются численно без сгущения сетки и условия (37).

Можно показать, что для функций первого и нулевого порядков при совпадении сегментов выполняется соотношение:

$$R = \sqrt{(\mathbf{r}(\xi_1) - \mathbf{r}(\xi_2))^2 + a^2} = \sqrt{l^2(\xi_1 - \xi_2)^2 + a^2} = l\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (a/l)^2}, \quad (38)$$

где l – длина сегмента, $\xi_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$.

Стандартным подходом, используемым в работах [2, 5], является разложение экспоненты по малому аргументу: $e^{-ikR} \approx 1 - ikR$, что справедливо в приближении тонкого провода, когда $a \ll L$. В данной работе используется выделение быстро меняющейся части интегрального ядра, что позволяет корректно учитывать поведение подынтегральной функции и является математически более строгим подходом.

Разобьем интеграл (36) на две части:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) \frac{e^{-ikR} - 1}{R} d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{R} d\xi_1 d\xi_2. \quad (39)$$

Приводя к виду, описанному в пункте 5, получаем:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} f(\xi_i, \xi_j) \frac{e^{-ikR} - 1}{R} + \sum_{i=1}^{ng} \int_0^1 \frac{f(\xi_1, \xi_i)}{R} d\xi_1, \quad (40)$$

где $ng = 5$ – число Гауссовых точек.

При $f(\xi_1, \xi_2) = 1$:

$$\sum_{i=1}^{ng} \int_0^1 \frac{f(\xi_1, \xi_i)}{R} d\xi_1 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{ng} \ln \left| \frac{(1 - \xi_i) + \sqrt{(1 - \xi_i)^2 + (a/l)^2}}{-\xi_i + \sqrt{\xi_i^2 + (a/l)^2}} \right| = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{ng} P_0(\xi_i), \quad (41)$$

где $P_0(\xi_i)$ – введённая для удобства вспомогательная функция.

При $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \varphi(\xi_2)$:

$$\sum_{i=1}^{ng} \int_0^1 \frac{f(\xi_1, \xi_i)}{R} d\xi_1 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{ng} \varphi(\xi_i) \left(\sqrt{(1 - \xi_i)^2 + (a/l)^2} - \sqrt{\xi_i^2 + (a/l)^2} + \xi_i P_0(\xi_i) \right) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{ng} \varphi(\xi_i) P_1(\xi_i), \quad (42)$$

где $P_1(\xi_i)$ – ещё одна вспомогательная функция.

При $f(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1) \varphi(\xi_2)$:

$$\sum_{i=1}^{ng} \int_0^1 \frac{f(\xi_1, \xi_i)}{R} d\xi_1 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{ng} \varphi(\xi_i) (P_0(\xi_i) - P_1(\xi_i)), \quad (43)$$

где $ng = 5$ – число Гауссовых точек, $P_0(\xi_i)$ и $P_1(\xi_i)$ – введенные для удобства в (41) и (42) вспомогательные функции.

Заметим, что для функций второго порядка внутренний интеграл во втором слагаемом в (40) не вычисляется аналитически через элементарные функции, из-за чего данный подход в этой ситуации не рассматривается.

Результаты расчетов

Рассмотрим следующую задачу, конфигурация которой изображена на рис. 12: исследуется дифракция плоской волны частотой 1 ГГц на отрезке провода кругового сечения радиуса 3,6 мм, который образует круговую петлю радиусом 0,08 длины волны $\lambda \approx 0,3$ м.

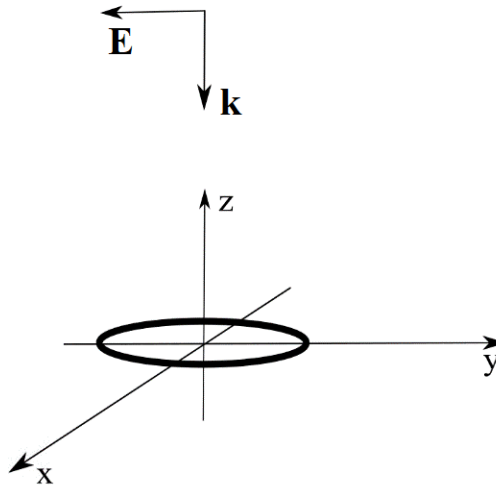


Рис. 12: Конфигурация задачи

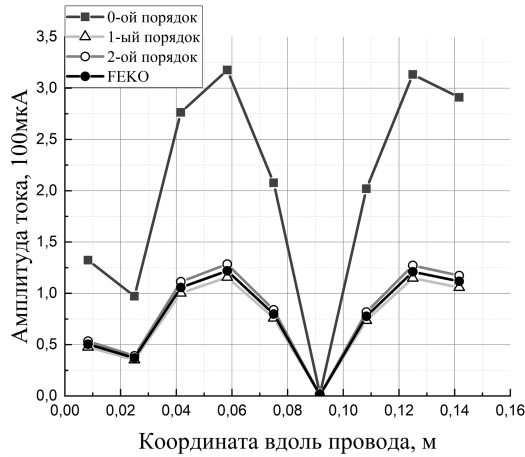


Рис. 13: Распределение амплитуды тока вдоль провода без обработки совпадающих сегментов

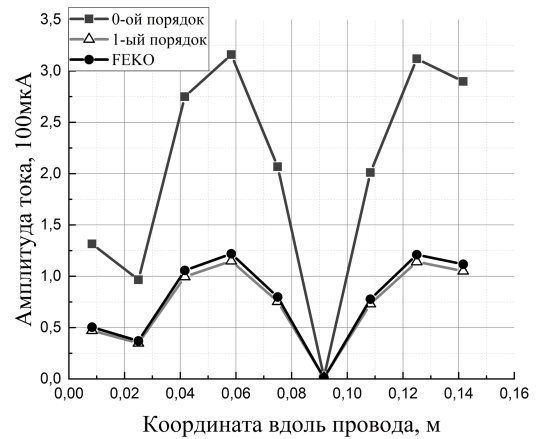


Рис. 14: Распределение амплитуды тока вдоль провода с обработкой совпадающих сегментов

На рис. 13 и рис. 14 видно хорошее совпадение численного решения, полученного разработанной программой при использовании конечных элементов 1-го и 2-го порядков, и решения, полученного при помощи программного комплекса FEKO, при разбиении данного провода на 9 сегментов длиной $\lambda/12$, где $\lambda \approx 0,3$ м — длина волны падающего поля. Однако заметим, что полученное решение при использовании базисных функций нулевого порядка существенно отличается от требуемого, откуда следует, что при использовании моделей проводов, разбиваемых на небольшое количество сегментов, данные пробные функции не способны обеспечить нужную точность получаемого решения, из-за чего, а также из-за невозможности явной передачи граничных условий, не будут рассматриваться в последующих результатах.

Исследуем также следующую задачу, изображенную на рис. 15. Рассматривается дифракция плоской волны частотой 1 ГГц на прямом отрезке провода длиной, равной 10λ , и радиуса 2 мкм: провод разбивается на 120 сегментов длиной $\lambda/12$. Данный пример является достаточно показательным, так как использует практически минимальный радиус, доступный для моделирования тонких проводов в FEKO.

Важно подчеркнуть, что численный расчет двойных интегралов (36) для совпадающих сегментов не достигает относительной точности (37) со значением $\delta = 10^{-4}$ за время, необходимое для решения задачи (1) в исходной постановке, что говорит о медленной сходимости численных методов при малых

значениях радиуса провода a . Как можно видеть на рис. 16, когда при вычислении интегралов вида (36) не выполняется условие (37), получаемое решение плохо согласуется с решением, найденным при помощи FEKO. Однако из рис. 17 видно, что ускорение сходимости численного метода расчета интегралов вида (36) обеспечивает уже хорошее соответствие с численными результатами, полученными при помощи FEKO.

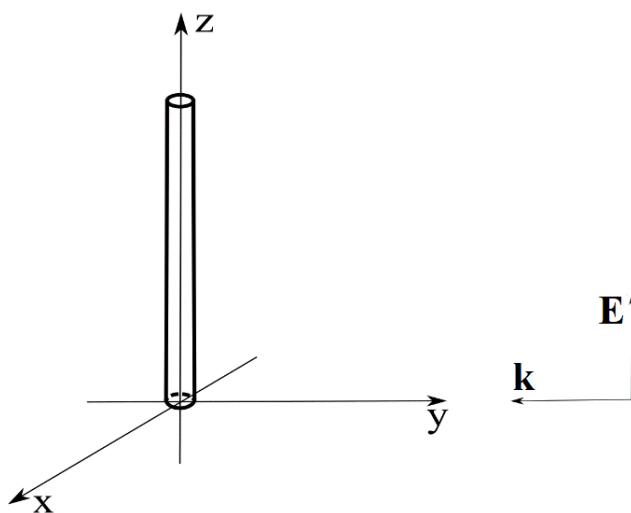


Рис. 15: Конфигурация задачи

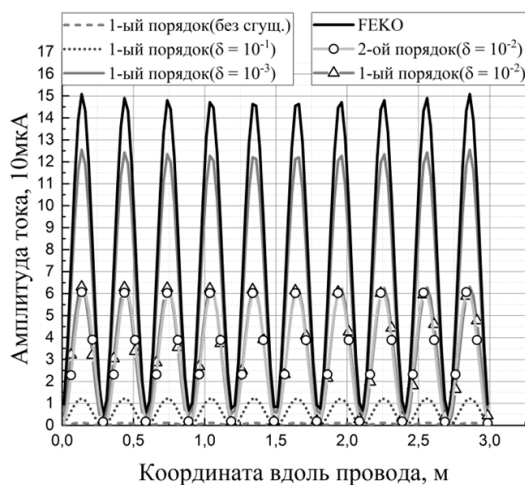


Рис. 16: Распределение амплитуды тока вдоль провода без обработки совпадающих сегментов

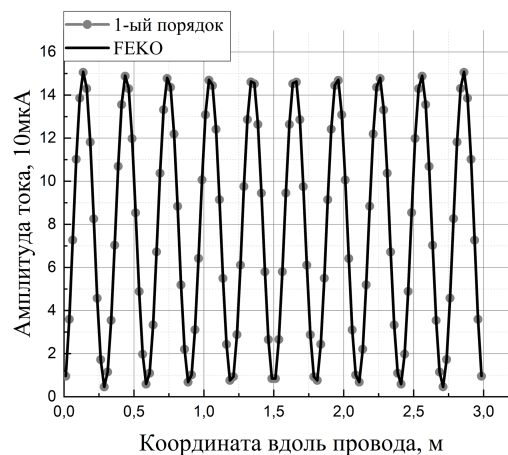


Рис. 17: Распределение амплитуды тока вдоль провода с обработкой совпадающих сегментов

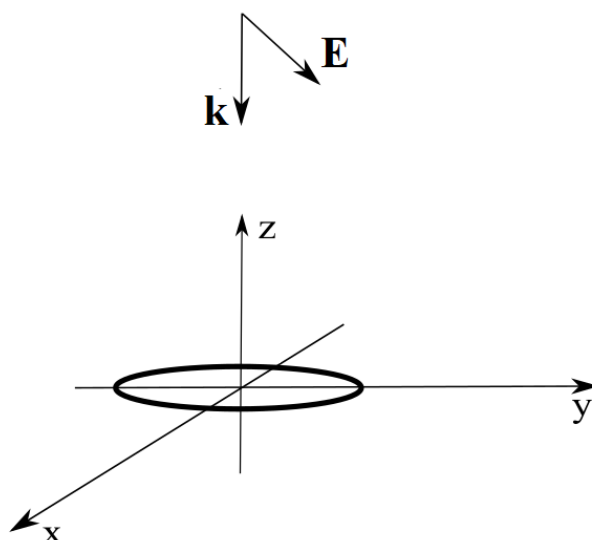


Рис. 18: Конфигурация задачи

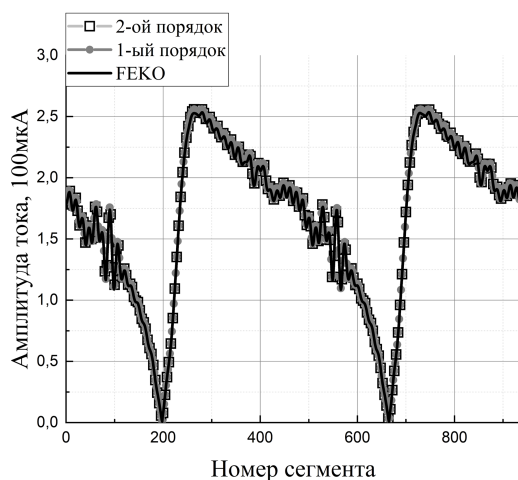


Рис. 19: Распределение амплитуды тока вдоль провода без обработки совпадающих сегментов

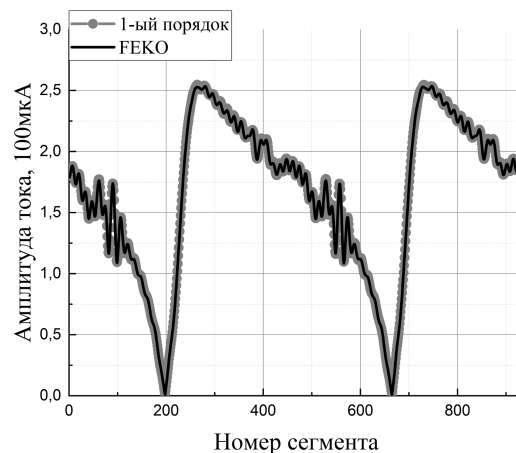


Рис. 20: Распределение амплитуды тока вдоль провода с обработкой совпадающих сегментов

Отсюда можно сделать вывод о необходимости использования рассмотренного метода обработки в случае совпадения сегментов, по которым ведется интегрирование.

Для исследования возможностей программы также рассмотрим асимметричную задачу, конфигурация которой изображена на рис. 18. Провод радиуса 3,6 мм, который образует эллипс с полуосями, равными 5 м и 3 м, исследуется дифракция плоской волны частотой 1 ГГц под углом 45° к осям OX и OY .

На рис. 19 и рис. 20 видно хорошее согласование численных решений с решением программного комплекса FEKO при разбиении данного провода на 256 сегментов длиной $\lambda/12$, где λ – длина волны падающего поля.

Таким образом, продемонстрировано хорошее соответствие результатов при разбиении проводов на достаточно большое количество сегментов для всех рассмотренных конфигураций.

Заключение

В работе рассмотрена задача дифракции на тонком идеально проводящем проводе круглого сечения произвольной формы изгиба. Разработана программа, позволяющая при помощи метода моментов численно решать задачу дифракции на данном теле с использованием базисных функций нулевого, первого и второго порядков. Показано, что использование пробных функций нулевого порядка часто не позволяет добиться приемлемой точности нахождения тока, индуцированного на проводе, в отличие от функций более высоких порядков. Исследован метод частично аналитического расчета интегралов для совпадающих сегментов с целью ускорения численного метода их вычисления. Показана целесообразность использования этого метода. Выявлены трудности применения базисных функций второго порядка при решении задачи дифракции на тонком проводе с малым радиусом, связанные с отсутствием возможности ускорения сходимости численных методов без использования специальных функций. При этом получаемые результаты, как правило, отличаются незначительно. В связи с этим можно сделать вывод, что предпочтительным с точки зрения точности получаемых результатов и скорости расчётов является использование базисных функций первого порядка.

Список литературы

- [1] Митра Р. Вычислительные методы в электродинамике. М.: Издательство Мир. 1977.
- [2] Harrington R.F. Field computation by moment methods. Wiley-IEEE Press. 1993.
- [3] Hallen E. Theoretical Investigation into the Transmitting and Receiving Qualities of Antennas// Nova Acta Upsala. 1938. Vol. 11. P. 1–44.
- [4] Pocklington H.E. Electrical oscillation in wires// Cambridge Phil. Soci. Proc. 1897. Vol. 9. P. 324–332.
- [5] Gibson W.C. The method of moments in electromagnetics. Chapman and Hall/CRC. 2021.
- [6] Richmond J.H. A wire-grid model for scattering by conducting bodies// IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1966. Vol. 14. P. 782–786.
- [7] Банков С.Е., Курушин А.А. Расчет излучаемых структур с помощью ФЕКО. М.: ЗАО НПП «Родник». 2008.
- [8] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк. 1991.
- [9] Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. ОГИЗ. 1948.
- [10] Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape// IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982. Vol. 30, no. 3. P. 409–418.
- [11] Balanis C.A. Advanced engineering electromagnetics. John Wiley & Sons. 2012.
- [12] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ; Наука. 1999.
- [13] Sarabandi K. Foundations of Applied Electromagnetics. Ann Arbor: Michigan Publishing Services. 2022.
- [14] Стренг Г. Теория метода конечных элементов. Мир. 1977.
- [15] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы, книга 1, Численный анализ. М.: «Академия». 2013.
- [16] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Учебник. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.
- [17] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука. 1989.

Приложение

При подстановке явного вида решения (28) для конечных элементов первого порядка уравнение (18) примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N I_m \frac{i}{4\pi} \left(\omega\mu \int_{C_t} \int_{C_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}') \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega\varepsilon} \int_{C_t} \left(\nabla_\tau \int_{C_m} (\nabla'_\tau \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m \right) \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) dl_t \right) = \int_{C_t} \mathbf{E}_\tau^i \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) dl_t. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассмотрим отдельно слагаемое:

$$\langle \nabla_\tau \Phi(\mathbf{r}), \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) \rangle = \int_{C_t} (\nabla_\tau \Phi(\mathbf{r})) \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) dl_t = 2\pi a \int_0^1 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}(\xi_t))}{\partial \xi_t} \mathbf{e}_t \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) d\xi_t, \quad (45)$$

проинтегрировав по частям, получим:

$$\Phi(\mathbf{r}) \mathbf{e}_t \mathbf{f}_t(\mathbf{r})|_0^1 - \int_0^1 \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{f}_t(\mathbf{r}(\xi_t))}{\partial \xi_t} \mathbf{e}_t d\xi_t = \Phi(\mathbf{r}) \mathbf{e}_t \mathbf{f}_t(\mathbf{r})|_0^1 - \int_{C_t} \Phi(\mathbf{r}) (\nabla_\tau, \mathbf{f}_t(\mathbf{r})) dl_t, \quad (46)$$

так как $C_t = T_m^- \cup T_m^+$, то:

$$\Phi(\mathbf{r}) \mathbf{e}_t \mathbf{f}_t(\mathbf{r})|_0^1 = \Phi(\mathbf{r}(\xi_t^+)) \mathbf{e}_t^+ \mathbf{f}_t(\mathbf{r}(\xi_t^+))|_0^1 + \Phi(\mathbf{r}(\xi_t^-)) \mathbf{e}_t^- \mathbf{f}_t(\mathbf{r}(\xi_t^-))|_0^1, \quad (47)$$

подставляя явный вид пробных функций, получим:

$$\Phi(\mathbf{r}) \mathbf{e}_t \mathbf{f}_t(\mathbf{r})|_0^1 = \Phi(\mathbf{r}_t) - \Phi(\mathbf{r}_t) = 0, \quad (48)$$

где $\mathbf{r}_t$ — радиус-вектор к узлу с номером t .

Тогда уравнение (44) примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N I_m \frac{i}{4\pi} \left(\omega\mu \int_{C_t} \int_{C_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}') \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\omega\varepsilon} \int_{C_t} \int_{C_m} (\nabla_\tau, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) (\nabla'_\tau, \mathbf{f}_t(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t \right) = \int_{C_t} \mathbf{E}_\tau^i \mathbf{f}_t(\mathbf{r}) dl_t, \end{aligned} \quad (49)$$

что кратко можно записать как:

$$\sum_{m=0}^N I_m \frac{i}{4\pi} \left(\omega\mu S_A + \frac{1}{\omega\varepsilon} S_\Phi \right) = F_E, \quad (50)$$

где введены обозначения:

S_A — элемент матрицы, отвечающий за вклад векторного потенциала:

$$\begin{aligned} S_A = & (\tilde{\mathbf{e}}_t^+, \tilde{\mathbf{e}}_m^+) \int_0^1 \int_0^1 \xi_m^+ \xi_t^+ \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^+ + \\ & + (\tilde{\mathbf{e}}_t^+, \tilde{\mathbf{e}}_m^-) \int_0^1 \int_0^1 (1 - \xi_m^-) \xi_t^+ \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^+ + \\ & + (\tilde{\mathbf{e}}_t^-, \tilde{\mathbf{e}}_m^+) \int_0^1 \int_0^1 \xi_m^+ (1 - \xi_t^-) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^- + \\ & + (\tilde{\mathbf{e}}_t^-, \tilde{\mathbf{e}}_m^-) \int_0^1 \int_0^1 (1 - \xi_m^-) (1 - \xi_t^-) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^-, \end{aligned} \quad (51)$$

S_Φ — элемент матрицы, отвечающий за вклад скалярного потенциала:

$$\begin{aligned} S_\Phi = & - \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^+ + \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^+ + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^- - \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^-, \end{aligned} \quad (52)$$

F_E — элемент вектора правой части:

$$F_E = \int_0^1 (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{e}}_t^+) \xi_t^+ d\xi_t^+ + \int_0^1 (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{e}}_t^-) (1 - \xi_t^-) d\xi_t^-. \quad (53)$$

Проведём аналогичные действия для функций второго порядка. Рассмотрим отдельно слагаемое, отвечающее за вклад скалярного потенциала:

$$\langle (\nabla_\tau \Phi(\mathbf{r})), \psi_t(\mathbf{r}) \rangle = 2\pi a \int_0^1 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \xi_t} \mathbf{e}_t \psi_t(\mathbf{r}) d\xi_t, \quad (54)$$

проинтегрировав по частям, получим:

$$\langle (\nabla_\tau \Phi(\mathbf{r})), \psi_t(\mathbf{r}) \rangle = 2\pi a \left\{ \Phi(\mathbf{r}) \psi_t(\mathbf{r}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_t(\mathbf{r})}{\partial \xi_t} d\xi_t \right\}. \quad (55)$$

Можно показать, что при подстановке явного вида базисных функций (29) и (31) в (55) первое слагаемое обратится в 0, аналогично случаю с функциями первого порядка. Тогда при подстановке явных выражений для потенциалов получим:

$$\sum_{m=0}^{2N} I_m \frac{i}{4\pi} \left(\omega \mu \int_{C_t} \int_{C_m} \psi_m(\mathbf{r}') \psi_t(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \varepsilon} \int_{C_t} \int_{C_m} (\nabla'_\tau, \psi_m(\mathbf{r}')) (\nabla_\tau, \psi_t(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl_m dl_t \right) = \int_{C_t} \mathbf{E}_\tau^i \psi_t(\mathbf{r}) dl_t. \quad (56)$$

Итого задача (15) сводится к системе линейных уравнений (56), где $t = \overline{0, 2N}$.

Подставляя данные базисные функции в уравнение (56), получим выражение:

$$\sum_{m=0}^N I_{2m} \frac{i}{4\pi} \left(\omega \mu S_A^1 - \frac{1}{\omega \varepsilon} S_\Phi^1 \right) + \sum_{m=1}^N I_{2m-1} \frac{i}{4\pi} \left(\omega \mu S_A^2 - \frac{1}{\omega \varepsilon} S_\Phi^2 \right) = F_E, \quad (57)$$

где введены обозначения:

1. В случае четного номера $t = 2n$, $n = \overline{0, N}$:

S_Φ^1 — элемент матрицы, отвечающий за вклад скалярного потенциала в первой сумме:

$$S_\Phi^1 = \int_0^1 \int_0^1 (-1 + 4\xi_m^+) (-1 + 4\xi_t^+) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^+ + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (-3 + 4\xi_m^-) (-1 + 4\xi_t^+) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^+ + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (-1 + 4\xi_m^+) (-3 + 4\xi_t^-) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^- + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (-3 + 4\xi_m^-) (-3 + 4\xi_t^-) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^-, \quad (58)$$

S_Φ^2 — элемент матрицы, отвечающий за вклад скалярного потенциала во второй сумме:

$$S_\Phi^2 = \int_0^1 \int_0^1 4(1 - 2\xi_m^-) (-1 + 4\xi_t^+) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^+ + \\ + \int_0^1 \int_0^1 4(1 - 2\xi_m^-) (-3 + 4\xi_t^-) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^-, \quad (59)$$

S_A^1 — элемент матрицы, отвечающий за вклад векторного потенциала в первой сумме:

$$S_A^1 = \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t^+(\xi_t^+), \tilde{\mathbf{e}}_m^+(\xi_m^+)) (-\xi_m^+ + 2(\xi_m^+)^2) (-\xi_t^+ + 2(\xi_t^+)^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^+ + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t^+(\xi_t^+), \tilde{\mathbf{e}}_m^-(\xi_m^-)) (1 - 3\xi_m^- + 2(\xi_m^-)^2) (-\xi_t^+ + 2(\xi_t^+)^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^+ + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t^-(\xi_t^-), \tilde{\mathbf{e}}_m^+(\xi_m^+)) (-\xi_m^+ + 2(\xi_m^+)^2) (1 - 3\xi_t^- + 2(\xi_t^-)^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t^- + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t^-(\xi_t^-), \tilde{\mathbf{e}}_m^-(\xi_m^-)) (1 - 3\xi_m^- + 2(\xi_m^-)^2) (1 - 3\xi_t^- + 2(\xi_t^-)^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t^-, \quad (60)$$

S_A^2 — элемент матрицы, отвечающий за вклад векторного потенциала во второй сумме:

$$S_A^2 = \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t^+(\xi_t^+), \tilde{\mathbf{e}}_m(\xi_m)) 4(\xi_m - \xi_m^2)(-\xi_t^+ + 2(\xi_t^+)^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m d\xi_t^+ + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t^-(\xi_t^-), \tilde{\mathbf{e}}_m(\xi_m)) 4(\xi_m - \xi_m^2)(1 - 3\xi_t^- + 2(\xi_t^-)^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m d\xi_t^-, \quad (61)$$

F_E — элемент вектора правой части:

$$F_E = \int_0^1 (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{e}}_m^+(\xi_t^+)) (-\xi_t^+ + 2(\xi_t^+)^2) d\xi_t^+ + \int_0^1 (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{e}}_m^-(\xi_t^-)) (1 - 3\xi_t^- + 2(\xi_t^-)^2) d\xi_t^-. \quad (62)$$

2. В случае нечетного номера $t = 2n - 1$, $n = \overline{1, N}$:

S_Φ^1 — элемент матрицы, отвечающий за вклад скалярного потенциала в первой сумме:

$$S_\Phi^1 = \int_0^1 \int_0^1 (-1 + 4\xi_m^+) \cdot 4(1 - 2\xi_t) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (-3 + 4\xi_m^-) \cdot 4(1 - 2\xi_t) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t, \quad (63)$$

S_Φ^2 — элемент матрицы, отвечающий за вклад скалярного потенциала во второй сумме:

$$S_\Phi^2 = \int_0^1 \int_0^1 4(1 - 2\xi_m) \cdot 4(1 - 2\xi_t) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m d\xi_t, \quad (64)$$

S_A^1 — элемент матрицы, отвечающий за вклад векторного потенциала в первой сумме:

$$S_A^1 = \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t(\xi_t), \tilde{\mathbf{e}}_m^+(\xi_m^+)) (-\xi_m^+ + 2(\xi_m^+)^2) \cdot 4(\xi_t - \xi_t^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^+ d\xi_t + \\ + \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t(\xi_t), \tilde{\mathbf{e}}_m^-(\xi_m^-)) (1 - 3\xi_m^- + 2(\xi_m^-)^2) \cdot 4(\xi_t - \xi_t^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m^- d\xi_t, \quad (65)$$

S_A^2 — элемент матрицы, отвечающий за вклад векторного потенциала во второй сумме:

$$S_A^2 = \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\mathbf{e}}_t(\xi_t), \tilde{\mathbf{e}}_m(\xi_m)) 4(\xi_m - \xi_m^2) \cdot 4(\xi_t - \xi_t^2) \frac{e^{-ikR}}{R} d\xi_m d\xi_t, \quad (66)$$

F_E — элемент вектора правой части, отвечающий за вклад падающего излучения:

$$F_E = \int_0^1 (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{e}}_t(\xi_t)) 4(\xi_t - \xi_t^2) d\xi_t, \quad (67)$$

где $\tilde{\mathbf{e}}(\xi) = \mathbf{r}'_\xi(\xi) = (-3 + 4\xi)\mathbf{r}_{n-1} + 4(1 - 2\xi)\mathbf{r}_n + (-1 + 4\xi)\mathbf{r}_{n+1}$.

Ссылка для цитирования:

Хузин И.С., Коняев Д.А. Применение метода моментов для численного решения задачи дифракции волн на тонком идеально проводящем проводе// Современная электродинамика. 2026. Т. 5, № 4(24). С. 13-29. EDN [KIHNMQ](#), doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-13-29](#)

Citation link:

Khuzin I.S., Konyaev D.A. The method of moments application for the numerical solution of the diffraction problem in a thin perfectly conducting wire// Modern Electrodynamics. 2026. Vol. 5, No. 4(24). P. 13-29. EDN [KIHNMQ](#), doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-13-29](#)

Erratum к статье «Особенности проектирования тонкоплёночных нагревателей оптических элементов космических аппаратов»

DOI оригинальной статьи: [10.24412/2949-0553-2026-222-10-18](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-222-10-18)

Erratum DOI: [10.24412/2949-0553-2026-424-30](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-30)

Erratum

Настоящим информируем читателей о том, что в статью А.В. Киселева, А.В. Гусева, А.В. Глущенко, С.А. Косицына, Д.И. Сурова, О.П. Баженовой, Е.В. Рыкова, А.О. Штокала «Особенности проектирования тонкоплёночных нагревателей оптических элементов космических аппаратов», опубликованную в журнале «Современная электродинамика» (2026. Т. 5, № 2(22). С. 10–18. DOI: [10.24412/2949-0553-2026-222-10-18](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-222-10-18)), по просьбе авторов внесены изменения в аффилиации. Остальные сведения о статье (название, аннотация, текст, выводы, ссылки) остаются без изменений.

Аффилиации

Исправленный список авторов и их аффилиаций:

А.В. Киселев¹, А.В. Гусев¹, А.В. Глущенко¹, С.А. Косицын¹, Д.И. Суров^{1,4}, О.П. Баженова²,
Е.В. Рыков³, А.О. Штокал³

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

² АО «НПО Лавочкина», Химки, Московская область, Россия

³ Филиал АО «НПО Лавочкина» в г. Калуга, Калуга, Россия

⁴ Национальный исследовательский технологический университет МИСЦ, Москва, Россия

Affiliations

Corrected list of authors and their affiliations:

A.V. Kiselev¹, A.V. Gusev¹, A.V. Gluschenkov¹, S.A. Kositsyn¹, D.I. Surov^{1,4}, O.P. Bazhenova²,
E.V. Rykov³, A.O. Shtokal³

¹ Institute of Theoretical and Applied Electrodynamics RAS, Moscow, Russia

² Lavochkin Association, JSC, Khimki, Moscow region, Russia

³ Affiliate of Lavochkin Association, JSC in the town of Kaluga, Kaluga, Russia

⁴ National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia

Ссылка для цитирования:

Киселев А.В., Гусев А.В., Глущенко А.В., Косицын С.А., Суров Д.И., Баженова О.П., Рыков Е.В., Штокал А.О. Erratum к статье «Особенности проектирования тонкоплёночных нагревателей оптических элементов космических аппаратов» // Современная электродинамика. 2026. Т. 5, № 4(24). С. 30. EDN [UARSKB](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-30), doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-30](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-30)

Citation link:

Kiselev A.V., Gusev A.V., Gluschenkov A.V., Kositsyn S.A., Surov D.I., Bazhenova O.P., Rykov E.V., Shtokal A.O. Erratum to the article «Design features of precision thin-film heaters for optical elements of spacecraft» // Modern Electrodynamics. 2026. Vol. 5, No. 2(22). P. 30. EDN [UARSKB](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-30), doi:[10.24412/2949-0553-2026-424-30](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2026-424-30)